# Построение интерполяционных сплайнов

Пусть на отрезке [*a;b*] задана непрерывная функция *y*(*x*). Построим на этом отрезке сетку . В узлах сетки известны значения функции *y*(*x*), для которых введем обозначения: .

Кубическим сплайном, соответствующим заданной функции *y*(*x*) и узлам  называется функция , удовлетворяющая следующим условиям:

1. на каждом сегменте  *i=1*,...,*n* функция  является многочленом 3-ей степени, т.е. ,  *i*=*1*,...,*n*
2. функциягладкая на всем отрезке [*a;b*], а также ее первая и вторая производные непрерывны на этом отрезке*.*  *, k*=0,1,2, *i*=*1*,...,*n-1*
3. для  выполняется условие интерполяции:  *i*=0,*1*,...,*n*.

На основании первого условия на каждом частичном отрезке  *i=1*,...,*n* будем искать звено сплайна, т.е. функцию как полином третьей степени в виде

 (1)

Коэффициенты  находятся следующим образом:

 (2)

Для нахождения коэффициентов *ci* решаем следующую систему уравнений:

, *i=1,2,…n-1* (3)

Добавим 

Матрица этой системы трехдиагональная. Для ее решения целесообразно использовать метод прогонки.

**Пример.** Для функции  на отрезке [1;2] с шагом  построить таблицу значений, на основе которой создать интерполяционный сплайн третьего порядка и вычислить значения в трёх точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Результаты сравнить с точным значением функции в указанных точках. Построить графики исходной функции, созданного сплайна и отметить в этой же плоскости вычисленные значения.

Построим таблицу значений аргумента и функции на отрезке [1;2]:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| *xi* | 1.0 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 |
| *yi* | -1 | -0.651 | -0.378 | -0.155 | 0.032 | 0.193 |

Вычислим значения коэффициентов по формулам (2), (3) и заполним таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *ai* | *bi* | *ci* | *di* |
| 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -0.651 | 1.572 | -2.587 | -12.935 |
| 2 | -0.378 | 1.212 | -1.02 | 7.833 |
| 3 | -0.155 | 1.021 | -0.888 | 0.661 |
| 4 | 0.032 | 0.856 | -0.765 | 0.619 |
| 5 | 0.193 | 0.779 | 0 | 3.823 |

Построим на каждом из отрезков  *i=1*,...,*n* многочлен третьей степени по формуле (1)











В итоге имеем кубический сплайн вида:



Используем построенный сплайн, чтобы вычислить значение в точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Выбираем точки *x=1.1 x=1.5*  *x=1.*9. Запишем в виде вектора: *X=(1.1, 1.5*, *1.*9)T





Сравним полученные результаты с точными значениями функции в данных точках.

При *x*=1.1 имеем  , погрешность :

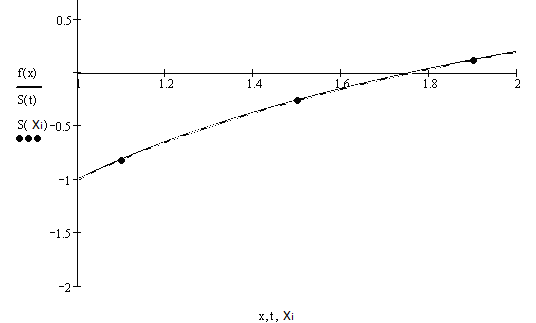
При x=1.5 имеем  , погрешность :

При x=1.9 имеем  , погрешность :

Построим график исходной функции, созданного сплайна и отметим в этой же плоскости вычисленные значения:



**Лабораторная работа**

**Задание:**

Для аналитически заданной функции построить таблицу значений, на основе которой создать интерполяционный сплайн третьего порядка и вычислить значения в трёх точках, расположенных ближе к началу, середине и концу отрезка. Результаты сравнить с точным значением функции в указанных точках. Построить графики исходной функции, созданного сплайна и отметить в этой же плоскости вычисленные значения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Функция *f* ( *x* ) | [ *x*о; *xп* ] | Шаг *h* |
| 1 |  | 1;2 | 0.2 |
| 2 |  | 1;2 | 0.2 |
| 3 |  | 0;π | π/5 |
| 4 |  | 1;10 | 2.0 |
| 5 | *x*2 + 4sin(*x*) | 0; π | π/5 |
| 6 |  | 1;2 | 0.2 |
| 7 |  | 1;10 | 2.0 |
| 8 |  | 0; π | π/5 |
| 9 |  | 0;π | π/5 |
| 10 |  | 1;10 | 2.0 |
| 11 |  | 0;1 | 0.2 |
| 12 |  | 0;5 | 1.0 |
| 13 |  | 0; 2π | 0.4 π |
| 14 | 2.2 *x*–2*x* | 0;5 | 1.0 |
| 15 |  | 0;2 | 0.4 |